

Fractions rationnelles – Chapitre 6

Généralité

Une fraction rationnelle est une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes.

Remarques

- nous parlerons tout simplement de « fractions », sans préciser « rationnelles »
- tout polynôme est une fraction rationnelle dont le dénominateur est égal à 1
- il ne faut pas oublier que la barre de fraction indique en fait une division
- la valeur numérique d'une fraction rationnelle est définie si la valeur numérique de son dénominateur est différente de zéro

PPMC et PGDC

Rappel

La recherche des PDGC et PPMC de nombres entiers est basée sur la décomposition en facteurs premiers. Par exemple pour 360, 500 et 300 :

360	2	500	2	300	2
180	2	250	2	150	2
90	2	125	5	75	3
45	3	25	5	25	5
15	3	5	5	5	5
5	5	1		1	
1					

$$360 = 2^3 * 3^2 * 5$$

$$500 = 2^2 * 5^3$$

$$300 = 2^2 * 3 * 5^2$$

$$\text{PPMC} = 2^3 * 3^2 * 5^3 = 9000$$

$$\text{PGDC} = 2^2 * 5 = 20$$

Marche à suivre pour déterminer le PGDC et le PPMC

- 1) **Décomposer les polynômes en facteurs irréductibles (factorisation)**
- 2) **Le PGDC est le produit de tous les facteurs irréductibles communs, chacun étant pris avec le plus petit de ses exposants**
- 3) **Le PPMC est le produit de tous les facteurs irréductibles distincts, chacun étant pris avec le plus grand de ses exposants**

Simplification d'une fraction

On obtient une fraction équivalente si :

- on multiplie numérateur et dénominateur par un même polynôme :
amplification
- on divise numérateur et dénominateur par un même polynôme :
simplification

Pour obtenir une fraction irréductible :

- Décomposer les numérateurs et dénominateurs en facteurs irréductibles
- Simplifier tous les facteurs communs aux numérateur et dénominateur

Exemple

$$\frac{x^2 + 4x - 21}{x^2 + x - 12} = \frac{(x + 7)(x - 3)}{(x + 4)(x - 3)} = \frac{x + 7}{x + 4}$$

Remarque

La mise en évidence d'un facteur -1 peut faciliter dans un certain cas, la simplification des fractions. Il faut simplifier les fractions avant toute autre opération.

Addition et soustraction

Il faut toujours simplifier les fractions avant d'effectuer les additions et les soustractions.

Marche à suivre pour l'addition et la soustraction :

- 1) Réduire les fractions en un même dénominateur, en principe le PPCM
- 2) Additionner les numérateurs obtenus

Exemple

$$\frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2+1} = \frac{(x-1)(x^2+1) + (x+1)^2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{(x^3 - x^2 + x - 1) + (x^2 + 2x + 1)}{(x+1)(x^2+1)} =$$

$$\frac{x^3 + 3x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{x(x^2+3)}{(x+1)(x^2+1)}$$

Multiplication et division

Marche à suivre pour la multiplication et la division :

Pour diviser deux fractions, on multiplie la première par l'inverse de la seconde.

Exemple

$$\frac{1}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{1}{3} * \frac{5}{4} = \frac{5}{12}$$

Remarques

- 3) Il faut effectuer les simplifications avant d'effectuer les multiplications
- 4) On a de fortes chances de factoriser l'un ou l'autre des deux termes du résultat obtenu si celui-ci est réutilisé dans un calcul ultérieur. Par conséquent, dans un premier temps, on indique les multiplications sans effectuer les calculs et ceux-ci ne seront faits qu'en cas de nécessité

Exemple

$$\frac{x^3+8}{x^3-8} \div \frac{x+2}{x-2} = \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)} * \frac{x-2}{x+2} = \frac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$$