Systèmes d'équations - Chapitre 11

Définitions

On signale un système d'équations par une accolade placée à gauche des équations.

$$\begin{cases} \mathbf{2x + 3y + 56z} \\ \mathbf{9x + 15y + 2z} \end{cases}$$

Deux systèmes d'équations sont équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.

Un système est **impossible** s'il n'admet pas de solution. Il est **indéterminé** s'il admet une infinité de solutions.

Les principes d'équivalence pour les systèmes d'équations

- On remplace l'une des équations du système par une combinaison linéaire des équations de ce système le facteur de l'équation remplacée étant différent de zéro : méthode d'addition ou des combinaisons linéaires.

- Une inconnue est explicitée dans l'une des équations du système. On remplace dans toutes les autres équations du système cette inconnue par son expression : méthode de substitution.

2 équations à 2 inconnues

Méthode de résolution

En utilisant les principes d'équivalence, on obtient une équation « simple ».

Remarques

- La méthode de substitution fait apparaître très souvent des fractions. On utilise donc plus volontiers la méthode d'addition, mais il existe différents types de systèmes d'équations qu'on ne peut résoudre que par la méthode de substitution.

- Il faut préalablement mettre le système sous sa forme canonique ordonnée.

<u>Substitution</u> : une fois qu'une inconnue est connue, on la remplace dans le calcul.

3 équations à 3 inconnues

Méthode de résolution

La résolution d'un système de 3 équations à 3 inconnues se ramène, par l'élimination de l'une des inconnues, à la résolution d'un système de 2 équations à 2 inconnues. De même la résolution d'un système de 4 équations à 4 inconnues se ramène à la résolution d'un système de 3 équations à 3 inconnues qui à son tour devient 2 équations à 2 inconnues.

Remarques

- il convient de choisir judicieusement l'inconnue que l'on désire éliminer.

- La méthode par combinaisons linéaires est généralement plus rapide pour des systèmes de 3 équations à 3 inconnues.

Le nombre d'équation n'est pas égal au nombre d'inconnues

Si le système a plus d'inconnues que d'équations, il est **généralement indéterminé**, mais il peut être impossible.

Si le système a plus d'équations que d'inconnues, il est **généralement impossible**, mais il peut être indéterminé ou avoir une solution unique.

Résolution d'un système par la méthode de Cramer

Pour résoudre Cramer, il faut utiliser les éléments sans les inconnues, donc uniquement avec les constantes.

Définition de Cramer

Les éléments de D sont les coefficients des inconnues du système. On obtient ceux de Dx et Dy en remplaçant les coefficients de l'inconnue correspondante par les constantes du second membre.

Pour trouver les solutions, il faut diviser Dx et Dy par D.
Cette marche à suivre est valable pour les systèmes à 2, 3, 4, 5, etc… inconnues.

Gabriel Cramer est un mathématicien suisse (1704 – 1752)

Exemple

$$\begin{cases} 4x + 3y = 10 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 15 = -19$$

$$Dx = \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -10 - 9 = -19$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 50 = -38$$

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{-19}{-19} = 1 \qquad y = \frac{Dy}{D} = \frac{-38}{-19} = 2$$

Remarques

- Si D = 0 et que Dx = 2, par exemple, le système est impossible. Par contre, si D = 0 et que Dx = 0, le système est indéterminé

- Dans le cas d'un système incomplet, il est plus simple de résoudre le système par substitution